

# ANÁLISIS DE MODIFICACIÓN DE LA REGIÓN NOMINAL DE CONTACTO EN UNIONES MECÁNICAS CÓNICAS POR FRICCIÓN

Jorge Bedolla Hernández, Dariusz Szwedowicz Wasik

Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico (CENIDET), Departamento de Ingeniería Mecánica.

Interior Internado Palmira s/n, Cuernavaca, Mor., México. Tel/fax:+52 (777) 3627770.

e-mail: [lbedolla@cenidet.edu.mx](mailto:lbedolla@cenidet.edu.mx)

## Resumen

En el artículo se presenta un estudio de modificación de la región nominal de contacto entre elementos de una unión mecánica eje cubo por fricción, con aros cónicos deformables como interfaz. La relación del área nominal de contacto y el coeficiente de fricción se analizan a detalle mediante una aproximación analítica y otra numérica. En la representación analítica se usa la teoría de mecánica de sólidos, y los aros cónicos deformables se consideran como interfaz de unión. En la simulación numérica se usa el método de elemento finito mediante el paquete computacional ABAQUS. Se considera que la fricción determina la capacidad portante de la unión. Al modificar el coeficiente de fricción, se modifica la longitud axial nominal de contacto de los aros. Esto para las mismas condiciones de carga externa y configuración de los elementos de unión. La modificación en la longitud axial de contacto resulta en una mayor concentración de esfuerzos de contacto o menor resistencia mecánica de la unión.

**Palabras clave:** contacto \_\_ fricción \_\_ modelo \_\_ simulación \_\_ unión mecánica.

## INTRODUCCIÓN

En la industria, un alto porcentaje de transmisión de potencia mecánica se asocia a movimiento rotatorio (Chancey et al. 2003). Esto obedece a diversos factores, donde uno de los principales es que el movimiento rotatorio es el más fácil de producir industrialmente, por ejemplo en compresores, motores, turbinas, ventiladores, por mencionar algunos (Bert & Wu, 2003). Estas máquinas generalmente incluyen ensambles flecha-rueda en alguna de sus variantes (Esebeck et al. 1996). Un conjunto particular de esas uniones se realizan mediante fricción, que se genera por la presión e interferencia entre superficies de contacto de la unión mecánica. Las uniones por fricción pueden o no contener elementos adicionales como interfaz elástica deformable, siendo ésta la que genera la presión en los elementos a unir e influye en la resistencia y fatiga de la unión (Barragetti & Terranosva, 2005). Una alternativa de interfaz en la unión eje cubo son los aros cónicos elásticos deformables, los cuales mediante una fuerza axial se deforman y proporcionan fuerza de fricción. Esto hasta cierta magnitud que depende de las características de los elementos (Szwedowicz & Bedolla, 2007).

Los aros cónicos elásticos deformables, al igual que el resto de uniones cónicas por interferencia y ensambles con cierre de fuerza (Dhufia *et al.* 2007), presentan una región nominal de contacto que se usa en los cálculos de su capacidad portante.

En el presente estudio se analizan y comparan regiones nominales de contacto en las superficies cilíndricas del aro cónico interno y la flecha. Esto en función de fuerzas de fricción involucrados en la unión. Las superficies seleccionadas para el análisis obedecen a que éstas se ubican en la región de la unión con mayor posibilidad de falla, a causa de sus diámetros, torques y fuerzas involucradas (Baldanzini, 2004). Las consideraciones para este análisis pueden extrapolarse para uniones similares que realizan unión por interferencia. El enfoque del análisis de la unión puede realizarse desde la teoría clásica de mecánica de sólidos (Juvinall & Marshek, 2006), o mediante alternativas que usan modelos elaborados de contacto aplicados en aspectos tribológicos (Sabelkin & Mall, 2007, Jamari et al. 2007, Menezes & Kailas, 2006). El análisis mediante la mecánica de sólidos sobreestima la región de contacto aparente en la unión, ya que

toma características nominales. Por otro lado, los modelos tribológicos a niveles microscópicos todavía no tienen una interpretación completa para explicar el comportamiento del sistema macro en función de un sistema micro (Lee y Polycarpou, 2007). Esto hace compleja su aplicación práctica en sistemas comunes de uniones.

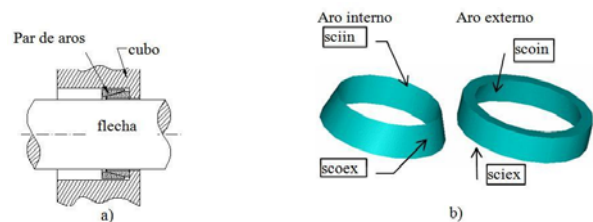
En función de lo anterior se considera que las características de contacto involucradas en la unión flecha-cubo con aros cónicos elásticos deformables, puede resultar de considerable utilidad en su diseño y en una mejor aplicación de las mismas. Para el presente análisis, con el objeto de considerar las variaciones en las superficies de contacto y sus características nominales, se analizan magnitudes del orden de tolerancias de manufactura de las partes. Se analiza también el mecanismo de deformación en los elementos de interfaz de la unión, a causa de lo cual se genera presión en las superficies de contacto y permite transmitir potencia mecánica. A continuación se presentan los elementos mecánicos que forman parte de la unión.

## UNIÓN MECÁNICA CON AROS CÓNICOS

La unión flecha-cubo con aros cónicos deformables tiene su principal aplicación en la transmisión de torque y/o fuerza axial (Reshétov, 1985). En los diseños de uniones flecha-cubo las variaciones geométricas generalmente no se consideran (Garzke et al. 1998), resultando en una subestimación de ésta y desempeño diferente al de diseño. En la Figura 1 se presentan los elementos básicos de una unión flecha-cubo con aros cónicos elásticos deformables, los cuales son: flecha, cubo de rueda, y par de aros cónicos. Cada par de aros se compone de un aro externo y otro interno (Figura, 1b). Las superficies de contacto en el aro externo son la cilíndrica externa (sciex) y la cónica interna (scoin). En el aro interno las superficies de contacto son la cilíndrica interna (sciin) y la cónica externa (scoex). Los pares de superficies en contacto que forman la unión se presentan entre: flecha y aro interno, aro externo y cubo, y conos de los aros. Puede considerarse inicialmente, como se hace comúnmente en la práctica, que la geometría de

los elementos de unión corresponde a la nominal de diseño. Sin embargo en un ensamble mecánico esta característica es difícil de lograr en el orden de magnitud de tolerancias.

En el proceso de unión con aros cónicos deformables, es necesario verificar que los elementos se coloquen en su posición relativa sin interferencia. A causa de las tolerancias de manufactura y su ajuste existen claros entre el cubo y el aro externo, y entre el aro interno y la flecha. Para lograr la unión, se restringe el movimiento axial de un aro y se aplica fuerza de compresión ( $F$ ) al otro en dirección axial (Bedolla et al. 2000). La fuerza  $F$  deforma los aros en dirección radial para lograr la unión de las superficies cilíndricas de los aros con el cubo de rueda y flecha. La presión en las superficies de contacto produce fuerza de fricción que determina la capacidad de transmisión de la unión (de par de torsión y fuerza axial). El apriete en los aros, sus características geométricas y propiedades mecánicas determinan la carga máxima permisible en la unión. A su vez la fuerza de fricción se modifica por el coeficiente de fricción y la presión de contacto.



**Figura 1.** Unión flecha-cubo. a) flecha, sección de cubo y sección de un par de aros, y b) par de aros cónicos y sus superficies de contacto.

Para un análisis de la unión con aros deformables puede considerarse al coeficiente de fricción constante y la deformación uniforme. En esta condición la fricción será función solo de la fuerza normal generada por la presión. Por lo tanto, para obtener un valor de fuerza normal y área nominal de contacto es conveniente contar con una distribución de presión de contacto uniforme en toda la longitud axial del aro. La diferencia entre condición nominal y real de deformación de los aros, se relaciona con la concentración localizada de esfuerzos, lo cual modifica las características resultantes de la unión. En la siguiente sección se presentan las

ecuaciones para analizar la unión en función de la deformación elástica de los aros.

### DEFORMACIÓN DE LOS AROS ELÁSTICOS DEFORMABLES.

Una alternativa para aplicar apriete axial a los aros cónicos deformables es mediante desplazamiento axial, el cual se considera proporcional a la fuerza ejercida, cuando se aplica en el intervalo elástico del material. Las variables geométricas a considerar en la deformación y desplazamiento se muestran en la Figura 2. En este análisis se considera que cualquier punto en la región cónica de los aros (Figura 1b), durante el apriete se moverá siguiendo la dirección de la superficie de contacto. Entonces, cualquier desplazamiento  $h$  de un punto en el sentido de la fuerza de apriete, provoca un desplazamiento radial  $\delta/2$  de los puntos sobre las superficies cónicas y es proporcional a su ubicación axial sobre la superficie. En la Figura 2 se observa que los desplazamientos radiales pueden representarse geoméricamente por la ecuación (1):

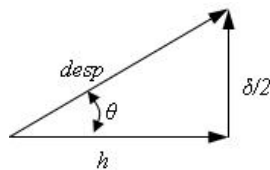


Figura 2. Relación de desplazamientos.

$$\text{tg } \theta = \frac{\delta}{2h} \tag{1}$$

donde:  $\theta$  es el ángulo de conicidad de los aros,  $\delta/2$  la deformación radial de un punto en las superficies cónicas de los aros,  $h$  el desplazamiento en dirección axial, y  $desp$  la combinación de desplazamientos. Despejando  $h$  se tiene que el desplazamiento axial es proporcional a la deformación diametral. Si la deformación ( $\delta$ ) se mantiene en el intervalo elástico, puede relacionarse con el diámetro medio ( $Dm$ ) en la interfaz, con la presión en las superficies de contacto ( $p$ ), y con un coeficiente radial ( $\psi$ ) que depende de la geometría y propiedades mecánicas de los elementos, como en la ecuación (2).

$$\frac{\delta}{Dm} = p\psi \tag{2}$$

Para obtener  $\psi$  en condiciones de equilibrio, se considera el elemento diferencial de la figura 3, de espesor unitario y fuerzas de cuerpo despreciables, de lo cual se obtienen las ecuaciones (3) y (4).

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} = 0 \tag{4}$$

donde:  $\sigma$  y  $\tau$  representan esfuerzos,  $\theta$  y  $r$  las direcciones tangencial y radial respectivamente (ver figura 3). En función de la configuración geométrica de los elementos de la unión flecha-cubo con aros cónicos, se considera que la distribución de esfuerzo es simétrica respecto al eje axial (perpendicular al plano xy de la figura 3). A partir de eso la función de esfuerzo para el elemento diferencial solo es función de  $r$  y no depende de  $\theta$ , por lo tanto la ecuación (3) se reduce a la ecuación 5.

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \tag{5}$$

La ecuación de compatibilidad en coordenadas polares para la ecuación (5) es la ecuación (6) (Timoshenko & Goodier, 1951):

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \left( \frac{d^2 \phi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\phi}{dr} \right) = 0 \tag{6}$$

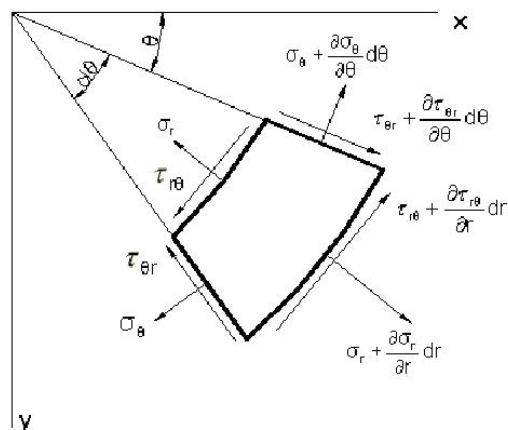


Figura 3. Elemento diferencial en coordenadas polares.

donde  $\phi$  es la función y  $r$  la dirección radial. Con el proceso matemático correspondiente se obtiene la solución general para los esfuerzos. Además, si se incluyen restricciones físicas de magnitudes de los radios interno ( $a$ ) y externo ( $b$ ); así como condiciones de frontera de presión en los radios interno ( $p_i$ ) y externo ( $p_o$ ), se obtienen las constantes de la solución. A partir de eso los esfuerzos son:

$$\sigma_r = \frac{a^2 b^2 (p_o - p_i)}{b^2 - a^2} \frac{1}{r^2} + \frac{p_i a^2 - p_o b^2}{b^2 - a^2} \quad (7)$$

$$\sigma_\theta = -\frac{a^2 b^2 (p_o - p_i)}{b^2 - a^2} \frac{1}{r^2} + \frac{p_i a^2 - p_o b^2}{b^2 - a^2} \quad (8)$$

Este análisis corresponde a un solo elemento cilíndrico. Para encontrar el coeficiente radial  $\psi$  se involucra a los otros componentes de la unión mecánica. Se considera a los aros como una interfaz entre los elementos a unir (flecha y cubo), y que la unión se logra por medio de deformación. Esto implica que en la unión por deformación, la flecha disminuye su diámetro de contacto y el cubo lo aumenta, por lo cual la deformación diametral total puede expresarse como:

$$\delta = |\delta_e| - |\delta_c| \quad (9)$$

donde  $\delta_e$  y  $\delta_c$  son deformación del diámetro de la flecha y del cubo respectivamente, de donde se obtiene que la deformación en el cubo de rueda es:

$$\varepsilon_{c\theta} = \frac{\pi(a + \delta_c) - \pi a}{\pi a} = \frac{\delta_c}{a} \quad (10)$$

y por condiciones elásticas

$$\varepsilon_{c\theta} = \frac{\sigma_{c\theta}}{E_c} - \frac{\nu_c \sigma_{cr}}{E_c} \quad (11)$$

donde:  $\varepsilon$  deformación unitaria,  $\sigma$  esfuerzo,  $\nu$  coeficiente de Poisson,  $E$  módulo de Young,  $r$  radio y  $c$  subíndice de variables del cubo. Al despejar  $\delta$  en la ecuación (10), sustituirla en las ecuaciones (11) y (8), y con presión cero en el diámetro externo del cubo, se obtiene la deformación de su diámetro. De forma análoga se obtiene la correspondiente deformación de diámetro de la flecha. Sustituyendo las

ecuaciones así obtenidas, en la ecuación (9) se obtiene la ecuación (12) para el coeficiente radial.

$$\psi = \left( \frac{1}{E_c} \left( \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} + \nu \right) + \frac{1}{E_e} \left( \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} - \nu \right) \right) \quad (12)$$

donde: el subíndice  $c$  asocia parámetros del cubo y  $e$  de la flecha. Para esta condición la presión en la superficie de contacto de la flecha estará dada por la relación del área nominal de contacto y la fuerza normal al contacto, por lo tanto

$$p = Q / (\pi D m l) \quad (13)$$

donde:  $p$  es la presión,  $Q$  la fuerza normal en la superficie cilíndrica,  $Dm$  el diámetro medio y  $l$  la longitud axial de contacto aparente. Además por condiciones de equilibrio  $Q$  se puede expresar como:

$$Q = F / \text{tg} \theta \quad (14)$$

donde:  $F$  es la fuerza de apriete requerida en la unión. Al realizar las sustituciones necesarias en la ecuación (2) se obtiene:

$$\delta = \frac{F \psi}{\pi l \text{tg} \theta} \quad (15)$$

Adicionalmente, el desplazamiento axial y el radial están relacionados mediante la ecuación (1) y en función de la fuerza de apriete requerida y del coeficiente de fricción  $\mu$  puede calcularse el desplazamiento en la unión como se indica en (16). En la cual se ha incluido una restricción de diseño en la relación de espesores (de 1.1) de los aros cónicos.

$$h = \frac{1.1 F \psi}{2 \pi l \text{tg}^2 \theta} \quad (16)$$

El desplazamiento mínimo de apriete axial será función del torque máximo a aplicar a la unión, y éste será función del diámetro de contacto y la fuerza de fricción en la interfaz. Al sustituir estas magnitudes en la ecuación (16) y considerando la progresión geométrica en las sumas de los términos de fuerzas de fricción se obtiene la ecuación (17).

$$h = \frac{1.1 M_{\text{tor}} \psi}{\pi d l \mu \text{tg} \theta} \quad (17)$$

Las ecuaciones (16) y (17), para fuerza de apriete ( $F$ ) y torque ( $M_{tor}$ ) respectivamente, incluyen propiedades mecánicas de los elementos de unión, y fuerzas que se generan a causa del coeficiente de fricción. Estas relaciones son necesarias para analizar la fuerza en función del desplazamiento axial ejercida en el par de aros para producir presión y contacto. La presión en cualquiera superficie en contacto de la unión (igual al esfuerzo radial), tiene que ser inferior al esfuerzo de aplastamiento del material, y de esta manera garantizar su funcionamiento. Las ecuaciones (16) y (17) contribuyen al cálculo y estimación de desplazamientos y esfuerzos en la unión. Sin embargo, éstas consideran un amplio intervalo lineal del material. Por otro lado simplifican el tamaño, geometría y mecanismo de deformación que ocurre en la interfaz. De lo cual se puede concluir, que si bien se obtuvo una aproximación teórica válida para el cálculo de las uniones, no es suficiente para estimar las regiones nominales de contacto y las concentraciones de esfuerzo. Las cuales se modifican en función de la geometría y fricción de la interfaz. También las concentraciones de esfuerzos se modifican como resultado de la reducción del área nominal de contacto. El análisis de estas modificaciones presentes en la unión, se muestra en la siguiente sección mediante un modelo discreto por el método de elementos finito, en el cual se varía el coeficiente de fricción y se observan las modificaciones presentes en la longitud nominal de contacto.

## MODELO DISCRETO DE LA UNIÓN

El problema de contacto de los aros elásticos deformables se simuló por elemento finito con el software comercial Abaqus. Las geometrías de los modelos discretos de elemento finito se generan con elementos axisimétricos de 4 nodos. Para esto se tomaron las mismas características descritas en la sección previa. Las superficies de contacto se supusieron congruentes con las geometrías nominales, de esta forma las condiciones iniciales correspondan a las descritas en los cálculos analíticos. La malla se generó en forma automática, pero con refinamiento en las regiones de contacto de cada pieza de la unión. El tamaño de la malla en la región de contacto fue tal que permite realizar modificaciones del perfil

del orden de magnitud de sus tolerancias. Además esta densidad de malla presenta convergencia para la distribución de esfuerzos y análisis del contacto. Con el objeto de reducir las variaciones obtenidas a consecuencia de los claros iniciales entre las superficies de contacto, al inicio de la simulación se consideraron todas las superficies en contacto y sin presión inicial.

El modelo discreto de la unión que se presenta en la Figura 4, corresponde a una ampliación de la región de ubicación de los aros que se muestra en la figura 1. Las superficies indicadas con condición de frontera (Figura 4), tienen restricciones de traslación en la dirección perpendicular a la correspondiente superficie. Las restricciones previenen el movimiento en dirección axial del cubo y la flecha, que pudieran presentarse a causa de la fricción. Pero permiten deformación radial en las superficies de contacto. Ésta se produce al incrustarse el aro interno en el aro externo como parte de su funcionamiento. Adicionalmente, la carga de apriete se aplica en la superficie horizontal superior del aro interno (Figura 4).

En la simulación se dividen cada par de superficies de contacto en esclava y maestra. En todos los casos se designa como esclava a la que tiene o puede proporcionar desplazamiento como parte de la interacción de contacto, y la otra superficie se designa como maestra. Con esta consideración, las superficies de contacto de la flecha, del cubo, y la superficie cónica del aro externo son maestras.

Es importante considerar que en un ensamble mecánico existen claros y variaciones relacionadas al proceso de manufactura, y que éstas influyen en las zonas de contacto nominal que se generan. Para el caso ideal de la unión, el contacto se presenta en toda la superficie, es decir, a lo largo de toda la longitud axial del aro, y su distribución de esfuerzos se esperaría simétrica en los elementos cónicos. Pero cuando no se cumple esa condición (caso real), la distribución de esfuerzos varía entre los aros. Como representación de esta característica, en la Figura 5 se muestra la distribución de esfuerzos para el modelo discreto de la Figura 4.

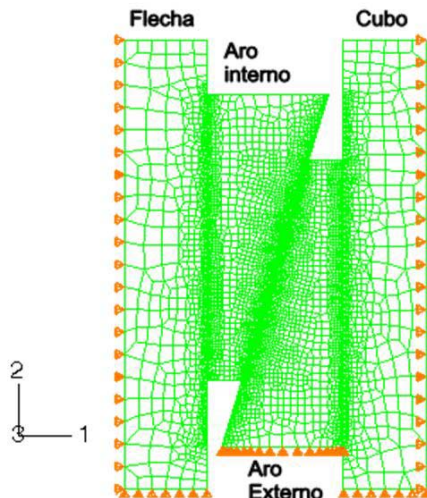


Figura 4. Representación del modelo discreto con un par de aros deformables.

## RESULTADOS

Las simulaciones numéricas se realizaron para una longitud axial de los aros cónicos de 5.3 mm, su ángulo de conicidad nominal fue de  $16^\circ$ , el diámetro de la flecha de 20 mm, el diámetro interior del cubo de 25 mm, la fuerza de apriete axial aplicada al aro externo de 1450N. El coeficiente de fricción en todas las superficies en contacto se considero igual y constante en cada una de las simulaciones numéricas. Pero éste se varió para las diferentes simulaciones en el intervalo de 0 a 0.35 con incrementos de 0.05. Esto con el objeto de analizar las modificaciones de la longitud nominal y de la presión de contacto a causa de la fricción. El módulo de Young fue de 210 GPa, el coeficiente de Poisson de 0.3.

En la Figura 5 se observa que la ubicación axial donde el aro cónico tiene menor espesor, presenta el máximo esfuerzo. En consecuencia esta región corresponde a las mayores presiones que se ejercen sobre la flecha y el cubo. La distribución de esfuerzos no es uniforme en la longitud axial de contacto del aro interno con la flecha (ver Figura 6), y las deformaciones radiales son proporcionales a éste. Esa condición se analizó para varias geometrías y se presenta en la unión aún en el caso de usar geometrías nominales de los elementos, y sin claros iniciales entre sus superficies de contacto en la unión (ver Figura 5). Los resultados numéricos bajo estas condiciones, muestran que la presión de contacto está

relacionada con el espesor radial del aro a lo largo de su longitud axial. La curva de esfuerzo de von Mises en la Figura 6 corresponde a la longitud axial de contacto del aro interno de la Figura 5. Esta curva tiene su valor máximo en la región de menor espesor del aro interno, y de forma general decrece en dirección axial hacia la ubicación del mayor espesor del aro.

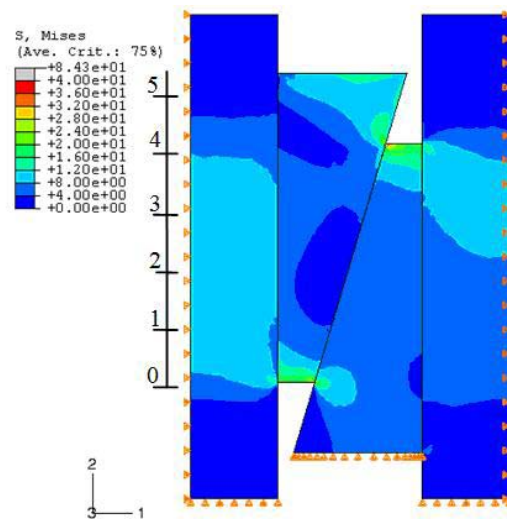


Figura 5. Distribución de esfuerzos no uniforme en la unión mecánica, escala del aro interno en mm.

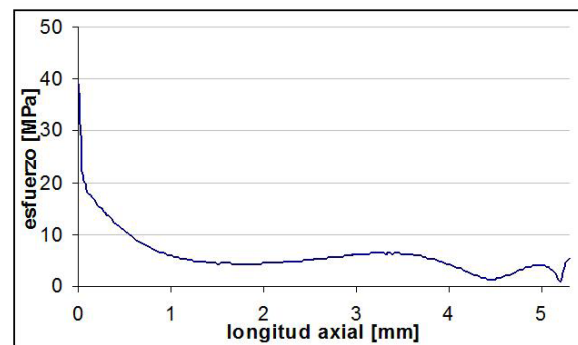


Figura 6. Esfuerzos de von Mises en dirección axial del aro interno en su superficie de contacto con la flecha.

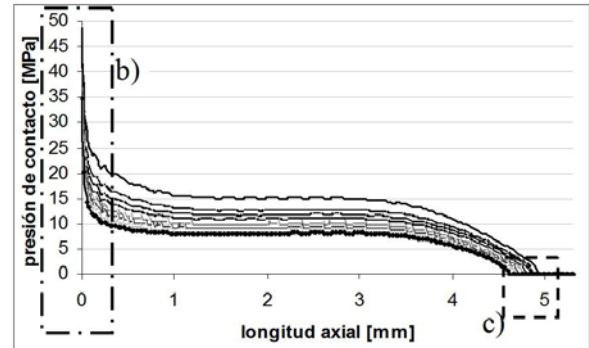
En la región de mayor espesor del aro existen variaciones que modifican los valores de esfuerzo, pero éstas se atribuyen a que en esa zona se aplica la carga de apriete y en consecuencia se tienen concentraciones de esfuerzos. Se infiere que de forma general este comportamiento del esfuerzo indica que la máxima presión de contacto se ubica en la región de menor espesor del aro y decrece en dirección axial hacia la región de su mayor espesor.

Los resultados obtenidos se muestran en la figura 7, donde la leyenda f0.0 corresponde a un coeficiente de fricción 0, y así sucesivamente hasta 0.35. De éstas curvas, se aprecia la influencia del coeficiente de fricción sobre la presión máxima de contacto (Figura 7b), así como en la longitud axial nominal de contacto del aro y la flecha (Figura 7c). Las curvas de la Figura 7 representan presión de contacto obtenidas del modelo discreto de la figura 4. Por lo tanto, las regiones de estas curvas con valor cero indican ausencia de contacto. De lo que se concluye que al modificar el coeficiente de fricción, manteniendo las mismas condiciones de carga y elementos de unión, la región y presión de contacto se modifican produciendo características finales diferentes a las de diseño. Esto se relaciona directamente con la capacidad portante de la unión mecánica. Adicionalmente, se observa que por la propia variación de espesor radial del aro no se logra presión de contacto en toda su longitud axial. Esta condición se presenta, sin importar el tamaño de los claros entre las superficies (siempre que se mantengan en el orden de magnitud de las tolerancias), aún en la ausencia de estos al inicio de la aplicación de la carga de apriete. Lo anterior permite inferir que la longitud axial de contacto de los elementos cónicos deformables presentará mayor disminución cuando se presentan claros entre las superficies de contacto. Condición que corresponde al caso real de ensamble de piezas mecánicas, con variaciones a causa de la manufactura en sus perfiles de contacto.

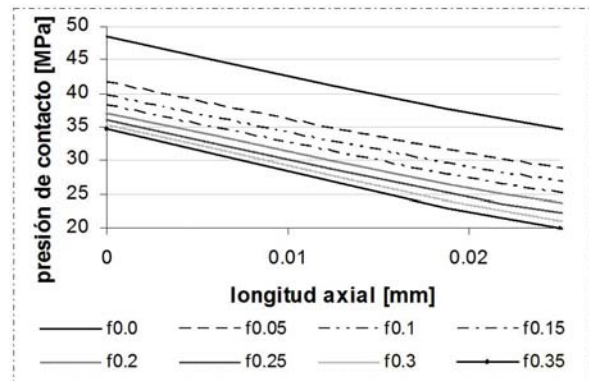
El valor máximo de la presión de contacto, y en general toda la curva de contacto decrece en proporción inversa al coeficiente de fricción. Esto se explica porque la región cónica en contacto entre los aros aumenta su fuerza de fricción con el coeficiente, y en consecuencia se incrementan las reacciones que provocan que los desplazamientos relativos entre los aros disminuyan. Lo cual genera una menor cantidad de incrustación de los aros y en consecuencia se tiene menor deformación radial. Todo esto para la misma carga de apriete y los mismo elementos. Se observa que la presión máxima en la región donde el aro tiene su menor rigidez radial es superior al 300% de la presión que se puede considerar como la nominal (parte central de la

curva de presión de contacto, Figura 7). Lo anterior sugiere poner especial atención en los valores nominales de la presión de trabajo de los materiales, ya que se pueden alcanzar esfuerzos de deformación plástica en las regiones de menor espesor de los aros.

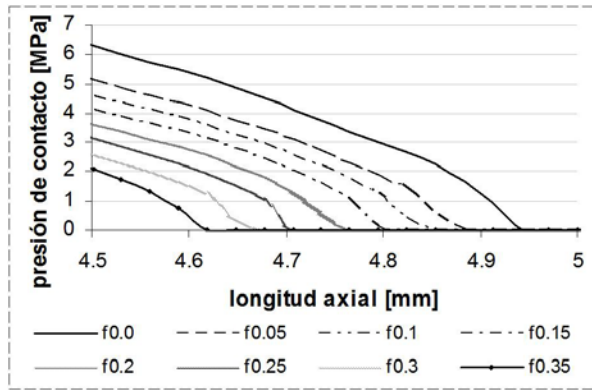
Los resultados de la Figura 7 indican que la longitud de contacto no es constante y difiere de la longitud axial nominal del aro. Sin embargo para una aproximación analítica como la que se obtuvo en la ecuación (16) los parámetros discretos usados para estimar el desplazamiento necesario en la unión, considera valores fijos de geometría y fuerza de apriete. Lo cual omite la influencia del coeficiente de fricción en la unión resultante. Para analizar esto, en la Figura 8 se presenta la comparación de los desplazamientos  $h$  en dirección axial del aro interno en la región en que se aplica la presión, tanto para la ecuación (16) como para las simulaciones numéricas realizadas con diferentes coeficientes de fricción. Para todos los casos se usó la misma configuración de elementos de unión, y la carga de apriete aplicada fue de 1450 N.



(a)



(b)



(c)

Figura 7. Presión de contacto entre aro interno y flecha para diferentes coeficientes de fricción, a) presión en la longitud axial del aro, b) y c) ampliaciones de regiones de a)

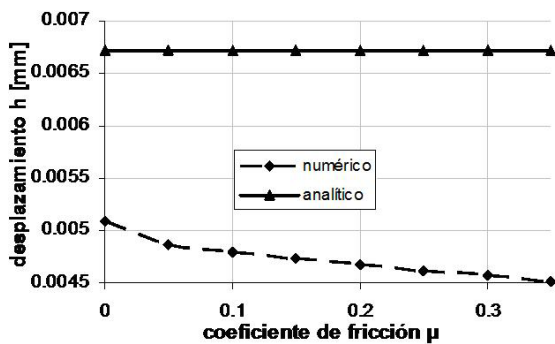


Figura 8. Comparación del desplazamiento  $h$  en función del coeficiente de fricción.

A partir de las curvas presentadas en la figura 8 se observa que las aproximaciones analíticas sobreestiman el desplazamiento  $h$  para una determinada fuerza de apriete en los aros (en todos los casos se consideró un apriete de 1450 N). Además, aunque la aproximación analítica toma en cuenta las características y propiedades mecánicas de los elementos de unión, esta aproximación solo considera valores nominales de las variables y omite modificaciones por variaciones de manufactura y del coeficiente de fricción. Por otro lado el desplazamiento  $h$  simulado decrece cuando se incrementa el coeficiente de fricción. Esto obedece a que a mayor resistencia al movimiento entre las superficies cónicas de los aros se obtiene menor deformación radial, traduciéndose en disminución de la capacidad portante de la unión en proporción inversa al coeficiente de fricción. Por otro lado, las simulaciones numéricas permiten

encontrar magnitudes máximas de presión en regiones localizadas del contacto, mientras que la aproximación analítica conserva solo los valores nominales. Esto puede tener un carácter negativo durante el tiempo de operación del sistema mecánicos, ya que como se observa de la figura 8 el desplazamiento analítico es mayor alrededor del 50% que el numérico para obtener el mismo valor de fuerza de apriete. Pero si se considera además que los picos de presión en las regiones de menor espesor del aro son mayores a 300% de la presión nominal de la región de contacto, entonces la posibilidad de alcanzar deformaciones plásticas al aplicar los desplazamientos calculados en forma analítica se incrementa. Esto tendría como efecto limitar la función de desensamble de la unión con aros cónicos deformables.

## CONCLUSIONES

Se presentó un estudio comparativo de la región de contacto axial aparente en los aros cónicos elásticos deformables usados como elementos de unión flecha cubo de rueda. Para esto se derivó una ecuación analítica usando relaciones de la mecánica de sólidos y también se obtuvieron resultados numéricos del correspondiente modelo. En las simulaciones numéricas se usó el paquete comercial Abaqus de elemento finito, y en el modelo discreto se aplicó un tamaño de malla que permite modificar el perfil de contacto dentro del orden de magnitud de las tolerancias de manufactura de los elementos de unión. Los resultados mostraron que la presión normal que se genera en las superficies de contacto, para realizar la unión, está en función del desplazamiento axial relativo de los aros cónicos elásticos deformables. Se concluye que al aumentar la fricción entre las superficies cónicas de los aros estos tienen menor movimiento relativo y en consecuencia su deformación radial es menor. Esto influye en la capacidad portante de la unión, ya que a menor desplazamiento axial relativo de los aros, menor será la presión de contacto que éstos ejercen en las superficies de la flecha y del cubo de rueda. Además, el cambio en la fuerza de fricción entre los aros genera que se reduzca la región de contacto, y para aumentarla se requerirá de incrementar la magnitud de la fuerza de apriete. Propiciando con esto



incremento no lineal de las presiones y esfuerzos máximos en las regiones de menor espesor de los aros deformables. El cambio en la longitud de contacto se presenta aún para el caso donde no existen claros iniciales entre las superficies de contacto y aumenta en forma considerable con el tamaño de los claros. Por lo que se considera recomendable que la variación de conicidad entre el aro interno y el externo este por debajo de los 0.4 grados. Se concluye también que la aproximación analítica se limita a valores nominales de la unión y sobreestima el desplazamiento necesario para lograr una determinada fuerza de apriete y resistencia de transmisión de la unión. Este aumento de la magnitud del desplazamiento puede propiciar que los valores nominales de esfuerzo estén dentro de la región elástica del material, pero que sus valores pico en las regiones de menor espesor del aro puedan estar en regiones plásticas del material, ya que esté último en todos los casos es mayor al 300% de la presión nominal.

En sistemas mecánicos reales, la eliminación de claros que se forman con la flecha y el cubo no es simétrica, ya que estos dependen de las tolerancias de manufactura en particular. La eliminación incompleta de claros en toda la longitud axial de los aros propicia contactos intermitentes (para el caso donde se presentan ondulaciones de la superficie), que no se unen firmemente. Esto puede propiciar la aparición de corrosión de la unión por fretting mediante microdeslizamientos relativos en los contactos intermitentes, contribuyendo al desprendimiento de reducidas porciones de material de la unión. La longitud de contacto tiene proporción inversa al coeficiente de fricción, donde para valores presentados (caso ideal, sin claros iniciales) se logra una longitud axial de contacto entre el 80% y 90% de la misma. Pero esta disminuye en proporción no lineal para casos reales donde se presentan claros entre elementos de la unión.

## AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen a la Dirección General de Educación Superior Tecnológica (DGEST) por el apoyo económico para realizar este trabajo dentro del proyecto de investigación DGEST 534.07-P.

## BIBLIOGRAFÍA

- Baldanzini N., 2004, A General Formulation for Designing Interference – Fit Joints with elastic – Plastic Components, *Journal of Mechanical Design*, Vol. 126, pp. 737-743.
- Barragetti S., Terranosva A., 2005, Effects of Over – Torque on Stress Relief in Conical Threaded Connections, *Journal of Mechanical Design*, Vol. 126, pp. 351-358.
- Bedolla J., Szwedowicz D., Martínez E., 2000, Análisis Teórico-Experimental de Elementos Deformables en Uniones Mecánicas, 9° Congreso Chileno de Ingeniería Mecánica y IV congreso Nacional de Energía, COCIM-CONAE 2000, Octubre 10-13, 2000, Valparaiso, Chile.
- Bert C.W., and Wu S., 2003, Dynamic Analysis of a Non Linear Torsional Flexible Coupling with Elastic Links, *Journal of Mechanical Design*, Vol. 125, pp. 509-517.
- Chancey V.C., Flowers G.T., Howard C.L., 2003, A Harmonic Wavelets Approach for Extracting Transient Patterns From Measured Vibration Data, *Journal of Engineering for Gas Turbines and power*, Transactions of ASME, Vol. 125, pp 81-89.
- Dhufia J.S., Powalka B., Ulsoy A.G., Katz R., 2007, Effect of a Non Linear Joint on the Dynamic Performance of a Machine tool, *Journal of Manufacturing Science and Engineering*, ASME, Vol. 129, pp. 943-950.
- Esebeck G., Kising M., Neuhof U., 1996, Investigation on Ceramic-Metal Joints for Shaft–Hub connections in Gas Turbines, *J. of Engineering for Gas Turbines and power*, Vol. 118, pp 627-631.
- Garzke, M., Dietz, P., Tan L., Schäfer, G., 1998, Transmission Capabilities and Elastic Design of Weakened Shaft-Hub Shrink Fits, *International Design Conference- '98*, Dubrovnik, May 19 – 22
- Jamari J., Rooij M., Schipper D., 2007, Plastic Deterministic Contact of Rough Surfaces, *Journal of Tribology*, Vol. 129, pp. 957-962.

- Juvinall R., Marshek K., 2006, *Fundamentals of Machine Component Design*, 4<sup>th</sup> ed., John Wiley and Sons, ISBN 13978-0-471-66177-1
- Lee C.H., Polycarpou A.A., 2007, Static Friction Experiments and Verification of an Improved Elastic – Plastic Model Including Roughness effects, *Journal of Tribology*, Vol. 129, pp. 754-760.
- Menezes P., Kailas S., 2006, Effect of Roughness Parameter and Grinding Angle on Coefficient of Friction When Sliding of Al-Mg Alloy Over EN8 Steel, *Journal of Tribology*, Vol. 128, pp. 697-704.
- Reshétov D., 1985, *Atlas de Máquinas*, Ed. CECSA, tr. Cárceres, ISBN 84-329-4802-0, p. 23.
- Sabelkin V., Mall S., 2007, Elastic-Plastic Multi-Asperity Contact Analysis of Cylinder-on-Flat Configuration, *Journal of Tribology*, Vol. 129, pp. 292-304.
- Szwedowicz D., Bedolla J., 2007, Experimental and Numerical Coupling Proof of Conical Friction Joints, *Key Engineering Materials*, Vol. 347 (2007), pp. 557-562, ISSN 1013-9826, Trans Tech Publications, Switzerland.
- Timoshenko, S., Goodier J., 1951, *Theory of Elasticity*, Mc Graw Hill, New York.